Tytuł: **Logiczne i filozoficzne implikacje twierdzenia Gödla**
Autor: Piotr Kołodziejczyk ; e-mail: pkolodziejczyk@interia.pl

Źródło: http://kognitywistyka.net ; e-mail: mjkasperski@kognitywistyka.net

Data: czerwiec 2003

1. Śmierć programu Hilberta

Historyczne spojrzenie na rozwój matematyki pozwala wnosić, że przełom dziewiętnastego i dwudziestego wieku był dla tej dyscypliny okresem wyjątkowym. Wystarczy wspomnieć tutaj chociażby o prężnym rozwoju algebry, topologii, czy geometrii. Szczególnie ta ostatnia zdawała się otwierać nowe horyzonty dla nauk dedukcyjnych. Oto bowiem odrzucenie piątego aksjomatu geometrii euklidesowej i związane z nim wykształcenie się geometrii siodłowej i hiperbolicznej zdawało się wskazywać na konieczność namysłu nad samymi podstawami matematyki. Skoro żadna geometria nie jest wyróżniona w porządku poznawczym, jedna nie jest bardziej „prawdziwa" od drugiej, to naturalnym jawi się pytanie o to, co przesądza o wyborze danej aparatury pojęciowej. Prostota i elegancja teorii? Większa moc eksplanacyjna? Wspólnota uczonych?

W świetle postawionych powyżej pytań zachodzi więc konieczność analizy pojęć fundamentalnych dla nauk formalnych. Do takich bez wątpienia należą pojęcia dowodzenia, rozstrzygalności i niesprzeczności. Rzecz to o tyle ważna, że w zależności od uzyskanych wyników uzyskuje się odpowiedź o status matematyki jako nauki.

> Odkrycie nieeuklidesowych geometrii – piszą Casti i de Pauli – sprawiło, że pojawiły się wątpliwości co do charakteru związku między obiektami matematycznymi i zewnętrznym światem. Przecież z definicji Wszechświat to właśnie rzeczywisty świat, natomiast punkty, proste i trójkąty to rzeczy znacznie mniej namacalne, istniejące w równej mierze w umyśle, co w świecie obiektów materialnych i fizycznych. [Casti, de Pauli 2003, s. 29]

Refleksja nad podstawami matematyki wynikała również z dostrzeżenia pewnych paradoksów teoriomnogościowych. Tytułem przykładu można wymienić russellowski paradoks fryzjera oraz antynomię klas niezwrotnych. Istnienie tych paradoksów zdawało się wskazywać, iż w obrębie samej matematyki istnieją problemy nierozstrzygalne. Zatem, status matematyki jako nauki absolutnie pewnej stawał pod znakiem zapytania.

Cóż na to matematycy? Rzecz jasna nie było im łatwo pogodzić się z zastanym stanem rzeczy. Nie znaczy, iż poddali się bez walki. Jak pisał bowiem Hilbert:

> Każdy problem w matematyce musi być ściśle rozwiązywalny, albo w postaci odpowiedzi na zadane pytanie, albo przez wykazanie niemożliwości podania rozwiązania.

Ideę tą ogłosił w swoim słynnym wystąpieniu na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w 1900 roku przedstawił listę 23 najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych.

> Jeszcze może ważniejsze od samych problemów – postuluje Steen – było wyznanie wiary Hilberta, że w matematyce nie może być miejsca na *ignorabimus*. Argumentacja Hilberta – a istocie także przykład całego jego życia – świadczyły, że w naturze matematyki leży formułowanie i rozwiązywanie zagadnień; nie istnieje więc możliwość, wedle sądu Hilberta, aby coś pozostawało na zawsze nieznane. Narzędzi samej tylko myśli, w umysłach twórczych matematyków, powinny wystarczać do rozwiązania każdego problemu matematycznego. Dla uzasadnienia swej tezy Hilbert (...) wziął na warsztat program kodyfikacji i formalizacji procesu matematycznego dowodu. Miał on wszelkie powody wierzyć, że formalizacja wprowadzi do matematyki tę samą pewność, jaką dwa wieki wcześniej dały mechanice prawa Newtona. Podobnie jednak jak mechanika kwantowa zburzyła determinizm Newtona, tak wynik o *nierozstrzygalności*, jaki uzyskał (...) Kurt Gödel zniszczył pewność Hilberta. (...) Gödel udowodnił (...), że – używając słów Hilberta – w matematyce zawsze istnieje pewne ignorabimus. [Steen 1983, s. 18]

Nadziei na wykazanie, iż w matematyce nie istnieje *ignorabimus* Hilbert upatrywał w programie formalizacji całej matematyki. Zdawało się bowiem, że źródłem paradoksów teoriomnogościowych są semantyczne treści wygłaszanych stwierdzeń. W celu wyeliminowania możliwości występowania tego rodzaju paradoksów należy, zdaniem Hilberta, stworzyć system pozbawiony treści semantycznych, w którym można stwierdzać prawdę i fałsz twierdzeń. Idea ta nazywa się ideą systemu formalnego, zaś program formalizacji matematyki określa się zwykle mianem formalizmu w filozofii matematyki.

Jak zbudować taki system?

1. Dokonujemy formalizacji języka teorii. Rozumowania przeprowadzane w intuicyjnych i aksjomatycznych teoriach matematycznych przeprowadzano w języku potocznym. W systemie formalnym język potoczny zastępujemy językiem sformalizowanym. W tym celu ustalamy najpierw system symboli zwany znakami pierwotnymi teorii, a następnie ustalamy reguły pozwalające na budowanie wyrażeń z tych symboli. Reguły te nazywamy formułami teorii (systemu).

2. Wśród znaków pierwotnych dokonujemy wyróżnienia ich rodzajów. Po pierwsze, wyróżniamy stałe specyficzne systemu, czyli symbole oznaczające wszystkie specyficzne pojęcia formalizowanej teorii aksjomatycznej. Na przykład: formalizując arytmetykę liczb naturalnych za stałe specyficzne można przyjąć symbole: 1, +, <, >, =. W każdym języku sformalizowanym występują także zmienne indywiduowe oznaczające obiekty, którymi zajmuje się dana teoria. W formalizacji ALN za zmienne indywiduowe można przyjąć wyrażenia X1, X2... oznaczające znaki dowolnych liczb naturalnych.

3. Następnie wyróżniamy zmienne wyższych typów. Są to symbole oznaczające dowolne obiekty matematyczne (nie będące idywiduami), którymi zajmuje się dana teoria np. dowolne zbiory idywiduów, zbiory zbiorów itd. Jeżeli w języku sformalizowanym nie występują zmienne wyższych typów, język ten nazywamy **językiem elementarnym**, zaś teorię sformalizowaną w oparciu o język elementarny – **teorią elementarną**.

4. Ze znaków pierwotnych tworzymy formuły atomowe, czyli wyrażenia odpowiadające najprostszym funkcjom zdaniowym. Na przykład $(X1 * X2) + X3 = X6 - X5$ to formuła atomowa sformalizowanej ALN. Jednak nie każdy ciąg znaków pierwotnych jest formułą atomową, gdyż może on być wyrażeniem, które jest bezsensowne w świetle przyjętych reguł konstrukcji.

5. Do znaków pierwotnych teorii dołącza się także symbole spójników ekstensjonalnych oraz kwantyfikatory.

6. Z formuł atomowych za pomocą spójników i kwantyfikatorów tworzymy wszystkie formuły sformalizowanego języka teorii. Wśród wszystkich formuł wyróżnia się te, które traktujemy jako odpowiedniki jej aksjomatów. Formuły te nazywamy **aksjomatami specyficznymi**. Oto aksjomatyka Peano dla ALN:

   1) $\forall x \ \neg (1 = x + 1)$

   2) $\forall x \, \forall y \, (x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$

   3) $\forall x \, \forall y \, (x + (y + 1) = (x + y) + 1))$

   4) $\forall x \, (x * 1) = x$

   5) $\forall x \, \forall y \, (x * (x + y) = (x * y) + x))$

   6) $\forall x \, \forall y \, (x < y \equiv \exists z \, (x + z = y))$

7. Następnym etapem aksjomatyzacji teorii jest wybór aksjomatów logicznych i reguł dowodzenia, które łącznie stanowią **aparat logiczny** teorii. Aksjomaty logiczne wybiera się z tych formuł reprezentujących tautologie logiczne.

8. Mając (7) przystępuje się do skonstruowania intuicyjnego pojęcia dowodu nazywanego zazwyczaj **dowodem formalnym**.

Z procedur formalizacyjnych wynikają pojęcia zupełności i rozstrzygalności. **Teoria zupełna** to taka, w której dla każdej formuły w jej języku (formuła reprezentuje zdanie) istnieje dowód albo dla tej formuły, albo dla jej negacji. Teoria nie posiadająca takich własności nazywa się niezupełną. W jej ramach istnieje tzw. **zdanie nierozstrzygalne**, czyli formuła taka, że ani ona ani jej negacja nie jest twierdzeniem teorii.

Sedno programu Hilberta można zatem streścić następująco: **w sformalizowanych teoriach matematycznych nie istnieją zdania nierozstrzygalne**. Z filozoficznego punktu widzenia postulat ten ma następujące konsekwencje:

(1) wśród twierdzeń matematyki nie mogą istnieć paradoksy w rodzaju antynomii klas niezwrotnych, choć nie wykluczone, iż mogą one istnieć w języku naturalnym;

(2) istnieje ścisła i wzajemnie jednoznaczna relacja pomiędzy prawdami matematycznymi i twierdzeniami systemu formalnego. Mówiąc inaczej, istnieje system, w którym każdej prawdzie matematycznej odpowiada twierdzenie, a każdemu twierdzeniu – prawda matematyczna.

Okazało się, iż Gödel zdruzgotał marzenia Hilberta. A było to tak...

2. Wynik Gödla

Postulaty Hilberta zakładały, że system formalny muszą charakteryzować: (1) zupełność, (2) skończoność, (3) niesprzeczność i (4) ogólność. Warunek skończoności opisu zakładał, że musi istnieć mechaniczna procedura pozwalająca w skończonej liczbie kroków podać dowód danego twierdzenia. Procedura ta nazywa się **algorytmem.** Znalezienie algorytmu dla dowolnego twierdzenia to słynny hilbertowski problem rozstrzygalności – *Entscheidungsproblem* Jak dziś wiadomo, algorytm tego rodzaju nie istnieje. Wynik ten zawdzięczamy Gödlowi.

Gödel postawił bowiem pytanie o to, czy możliwe jest arytmetyczne (liczbowe) przedstawienie systemu formalnego, który będzie obejmował całą arytmetykę. W swojej analizie austriacki logik wyszedł od *Principiów*... Whiteheada i Russella. W celu możliwości zastosowania arytmetyki do badań nad nią samą należało znaleźć sposób arytmetycznego kodowania symboli języka Whiteheada-Russella. Przedstawia się on następująco:

ZNAK	NG
¬	1
∨	2
→	3
∃	4
=	5
0	6
S	7
(	8
)	9
‘	10

W proponowanym ujęciu język Whiteheada-Russella składa się z trzech typów zmiennych:

(1) zmienne liczbowe – przyjmują wartości numeryczne;

(2) zmienne zdaniowe – zastępują wyrażenia logiczne lub wzory;

(3) predykaty – wyrażają własności liczb lub wyrażeń liczbowych np. pierwsza, większe

Zmienne koduje się za pomocą liczb pierwszych większych od 10, zmienne zdaniowe za pomocą kwadratów liczb pierwszych większych od 10, a predykaty – za pomocą sześcianów tych liczb.

<u>Sposób kodowania:</u>

(1) Dane wyrażenie: (∃x) (x = sy) – Istnieje takie x, że jest ono bezpośrednim następnikiem y.

(2) $x = 11$, $y = 13$

(3) Z tabeli otrzymujemy sekwencję liczb jednoznacznie charakteryzujących wyrażenie: 8, 4, 11, 9, 8, 11, 5, 7, 13,9)

(4) Bierzemy dziesięć pierwszych liczb pierwszych i mnożymy je poprzez podniesienie każdej do potęgi równej liczbie kodującej odpowiedni symbol w wyrażeniu. Liczy pierwsze to: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

(5) Mamy zatem: $(\exists x)\ (x = sy) = 2^{8} * 3^{4} * 5^{11} * 7^{9} * 11^{8} * 13^{11} * 17^{5} * 19^{7} * 23^{13} * 29^{9}$

Ten sposób kodowania jest podobny do kodu ASCII w komputerach. System *G* koduje jednak znaki arytmetyczne z wielu poziomów. Jest to pierwszy element umożliwiający skonstruowanie dowodu o niezupełności. O drugim – za tydzień.