Do czego służy pochodna?
Przykłady zastosowań pochodnej pochodzących z różnych dyscyplin.

SPIS TREŚCI

I. Rola matematyki w naukach ścisłych....................3
II. Kto jest twórcą rachunku różniczkowego – czyli głośny spór o palmę pierwszeństwa....................5
III. Pochodna i jej obliczanie....................8
III.1 Prędkość poruszającego się punktu....................8
III.2 Styczna do krzywej....................9
III.3 Definicja pochodnej....................10
IV. Pojęcie pochodnej a podstawowe pojęcia różnych dziedzin wiedzy....................13
V. Zastosowanie pochodnej do badania własności funkcji....................16
VI. Zastosowanie własności funkcji różniczkowalnych....................22
VII. Zamiast uwag końcowych....................24
VIII. Literatura....................25

I ROLA MATEMATYKI W NAUKACH ŚCISŁYCH

Matematyk i polityk francuski E. Borel (1871-1956) pisał: *Jeśli nawet matematyka jest czystym wytworem umysłu ludzkiego, to jednak ciągle zdarzało się, jakby w jakimś ustawicznie powtarzającym się od wieków cudzie, że piękne uporządkowanie konstrukcji logicznych (dzięki którym matematyka chciała jedynie dokonać postępu w swojej dziedzinie) okazywało się tajemniczo zgodne ze wszechświatem zmysłów i pozwalało dokonywać nieoczekiwanego postępu w naukach fizycznych.*[1] Filozof angielski FRANCISZEK BACON (1561-1626) pisał natomiast: *Istnieje w naturze wiele zagadnień, których nie można ani dostrzec z wystarczającą dokładnością, ani przedstawić dostatecznie jasno, ani wykorzystać dostatecznie zręcznie bez pomocy i interwencji matematyki.*[2]

Zastosowanie matematyki do badań przyrodniczych - w szerokim tego słowa znaczeniu - można podzielić na dwa etapy. Pierwszy z nich, to budowa modelu matematycznego rozważanego zjawiska. Natura zjawiska nie jest przy tym istotna, np. może być nim rozładowanie kondensatora w obwodzie zawierającym opór i indukcyjność, uginanie się belki pod wpływem przyłożonej siły, i in. Na model matematyczny składają się zwykle równania, wyrażające w przybliżony, lecz właściwy matematyce zwięzły i przejrzysty sposób, najistotniejsze, stwierdzone doświadczalnie powiązania i zależności między miarami występujących w badanym zjawisku wielkości fizycznych. Inaczej mówiąc, model matematyczny opisuje w sposób przybliżony, lecz zwięzły i przejrzysty, te cechy zespołu praw fizycznych rządzących modelowanym zjawiskiem, których wpływ na przebieg zjawiska uważamy na podstawie doświadczeń za dominujący. Oczywiście, dla jednego zjawiska fizycznego można budować różne modele, uwzględniające mniej lub więcej cech zespołu praw fizycznych rządzących badanym zjawiskiem. W modelach takich mogą występować różne pojęcia matematyczne.

Etap drugi polega na poddaniu zbudowanego modelu formalnemu rozumowaniu matematycznemu, które pozwala wysnuwać wnioski mające często postać nowych rozważań. Otóż równania te mogą sugerować istnienie takich związków między miarami wielkości fizycznych i takich zjawisk, które uprzednio nie były stwierdzone

[1] *Matematyka - nasza niedostrzegalna kultura*, dz. zb. pod red. M. Gołębiowskiego, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1994, s. 9
[2] Tamże. s. 22

doświadczalnie. Jeżeli związki te czy też zjawiska zostaną następnie potwierdzone doświadczeniem, to można mówić o odkryciach fizycznych dokonanych za pomocą matematyki.

Historia fizyki zna wiele ważnych odkryć, w których znaczenie matematyki było dominujące.

Ponieważ model matematyczny badanego zjawiska stanowi tylko przybliżony opis zespołu praw fizycznych rządzących tym zjawiskiem, więc należy uznać za naturalne, że wnioski otrzymane z tego modelu będą także tylko w przybliżeniu zgodne z doświadczeniem. Trzeba jednak zdawać sobie sprawę, że sama istota tej zgodności, zgodności produktu otrzymanego za pomocą formalizmu matematycznego z doświadczeniem, nie jest w ogóle znana. Nie wiemy co jest przyczyną tej zgodności choć możemy się domyślać, że rozumowanie człowieka, które ukształtowało się na obserwacjach przyrody, nie odbiega od niej w swych wnioskach.

Na podstawie podanych tu uwag należy podkreślić, że jedynym kryterium sensu fizycznego wniosków matematycznych jest doświadczenie. Zaznaczam jednak, że chodzi tu o poprawność interpretacji fizycznych, nie zaś o poprawność rozumowania matematycznego, gdyż matematyka jest nauką abstrakcyjną i wszelkie sprawdzanie jej na drodze doświadczalnej byłoby zwykłym nieporozumieniem.

Historia fizyki dostarcza wielu przykładów na to, że doświadczenie potwierdza zazwyczaj wnioski i sugestie, jakich dostarcza rozumowanie matematyczne. Z tego względu matematyka stanowi potężne narzędzie pracy badawczej fizyków i techników.

II KTO JEST TWÓRCĄ RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO - CZYLI GŁOŚNY SPÓR O PALMĘ PIERWSZEŃSTWA

W roku 1638 Pierre Fermat (prawnik i matematyk francuski, 1601-1665) odkrył metodę znajdowania maksimów i minimów funkcji algebraicznych. Jego prace utorowały drogę rachunkowi różniczkowemu.

W 1684 roku ukazała się licząca sześć stronic praca G. Leibniza (niemiecki uczony, 1646-1716) z rachunku różniczkowego. Została opublikowana w założonym przez niego czasopiśmie matematycznym *Acta Eruditorum*. Autor podał w niej pojęcie i symbol różniczki oraz przytoczył bez dowodów reguły różniczkowania sumy, iloczynu, ilorazu funkcji złożonej oraz zasady wyznaczania ekstremów i punktów przegięcia. Z kolei w 1686 roku podał pojęcie i symbol całki. Znany wzór Leibniza na n-tą pochodną iloczynu pochodzi z roku 1695. Skuteczność stworzonego przez Leibniza rachunku różniczkowego została sprawdzona przy rozwiązywaniu wielu zagadnień mechaniki. Ważkim elementem jego dorobku naukowego jest wprowadzona przez niego symbolika. Od niego pochodzą symbole różniczek dx, d^2x, d^3x, całki $\int$.

Prace Leibniza zawierały pewne niejasności i niekonsekwencje. Mimo to stanowiły początek niezwykle płodnego okresu twórczości matematycznej. Do rozpowszechnienia nauki Leibniza przyczynili się przede wszystkim bracia Jacob Bernoulli (szwajcarski matematyk, 1654-1705), Johann Bernoulli (młodszy brat Jacoba, matematyk, 1667-1748) i G. L'Hospital (matematyk francuski, 1661-1704). Leibiz nie pozostawił po sobie dzieła na miarę swych zdolności. Wyniki swych dociekań zwarł w drobnych artykułach i licznej korespondencji.

Mimo że Leibniz był raczej człowiekiem ugodliwym, uwikłał się w ostatnich latach swego życia w spór z I. Newtonem (fizyk, astronom, matematyk i filozof angielski, 1642-1727) o pierwszeństwo stworzenia rachunku różniczkowego. Spór ten był szczególnie rozdmuchiwany przez zwolenników obu uczonych.

Pierwsze rezultaty uzyskał Newton, nastąpiło to w latach 1665-1666. Wyniki jego prac zostały opublikowane dużo później w dwóch pracach: *De quadratura curvanum* (*O kwadraturze krzywych* 1704 r.) i *The Method of Fluxions and Infinite Series* (*Metoda fluksji i szeregów nieskończonych* 1736 r.). W pracach tych rozwinął podstawy analizy matematycznej, rozwiązał takie zagadnienia jak wyznaczanie ekstremów funkcji, punktów przegięcia, znajdowanie stycznych do krzywych, obliczanie długości łuków krzywych, pól powierzchni ograniczonych przez krzywe, jak również rozwiązywanie prostych równań różniczkowych.

Leibniz i Newton doszli do swych odkryć samodzielnie i na innej drodze. Leibniz dokonał odkrycia pochodnej przy zagadnieniu poszukiwania stycznej do krzywej, natomiast Newton – przy rozwiązywaniu zagadnień z mechaniki.
Należy zaznaczyć że wielcy matematycy zawarli ze sobą znajomość w latach 1673, 1676, podczas pobytu Leibniza w Londynie.

Oto krótkie biografie twórców rachunku różniczkowego.

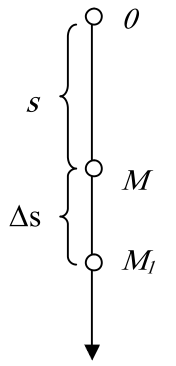
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), niemiecki filozof i matematyk, studiował na uniwersytetach w Lipsku, Jenie i Altdorfie filozofię i prawo, w 1666 opublikował pierwszą pracę matematyczną o kombinatoryce. W 1672 przybył jako dyplomata do Paryża, gdzie zapoznał się głębiej z ówczesną matematyką. W 1673 został członkiem Royal Society w Londynie (za skonstruowanie maszyny do liczenia), w 1700 założył Akademię Nauk w Berlinie. Niezależnie od Newtona stworzył rachunek różniczkowy i całkowy, wprowadzając doń oznaczenia obecnie używane. Opisał mechanizm do przybliżonego graficznego całkowania, w swoich listach do przyjaciół wyłożył początki teorii wyznaczników, próbował sformalizować zagadnienia należące dziś do logiki matematycznej. Leibniz wprowadził bardzo dużo symboli matematycznych, wiele z nich jest do dziś w użyciu.

Sir Isaac Newton (1642-1727) - fizyk, astronom, matematyk i filozof angielski. W 1665 ukończył uniwersytet w Cambridge uzyskując tytuł bakałarza, a w 1668 stopień magistra; w 1669 otrzymał tam katedrę fizyki i matematyki, a w 1672 został członkiem londyńskiego Royal Society, którego był prezesem od 1703. Od 1699 był członkiem Akademii Nauk w Paryżu. Oprócz epokowych odkryć w dziedzinie fizyki Newton jest również współtwórcą (obok Leibniza) rachunku różniczkowego i całkowego (który nazywał rachunkiem fluksji), podał metodę przybliżonego rozwiązywania równań algebraicznych (metoda stycznych), wzór interpolacyjny, pozwalający na znalezienie wielomianu n-tego stopnia przyjmującego w n danych punktach określone wartości, badał pewne własności krzywych trzeciego stopnia i podał ich klasyfikację, jest autorem twierdzenia o symetrycznych funkcjach pierwiastków równań algebraicznych i in.

III POCHODNA I JEJ OBLICZANIE

III.1 Prędkość poruszającego się punktu

Rozpatrzę spadający swobodnie (w próżni – aby nie uwzględniać oporu powietrza) ciężki punkt materialny. Jeśli czas t (s) będę liczyła od początku spadania, to droga s (m) przebyta w ciągu tego czasu wyrazi się następująco:



Rys. 1

(1) $$s = \frac{1}{2} g t^2 ,$$

gdzie $g = 9{,}81 m/s^2$. Określę *prędkość* v punktu w danej chwili t, gdy punkt znajduje się w położeniu M (rys. 1).

Nadaję zmiennej t pewien przyrost Δt i rozpatruję chwilę $t + \Delta t$, gdy punkt będzie w położeniu M_1. Przyrost MM_1 drogi odpowiadający okresowi czasu Δt oznaczam przez Δs. Podstawiając do wzoru (1) $t + \Delta t$ zamiast t otrzymuję wyrażenie

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g \left(t + \Delta t\right)^2 ,$$

skąd

$$\Delta s = \frac{1}{2} g\left(2t\Delta t + \Delta t^2\right) .$$

Dzieląc Δs przez Δt otrzymuję *prędkość średnią* spadającego punktu na odcinku MM_1

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t .$$

Prędkość ta zmienia się *wraz ze* zmianą Δt. Stan spadającego punktu w chwili t jest opisany tym lepiej, im mniejszy jest okres Δt, który upłynął od tej chwili.

Prędkością v punktu w chwili t nazywa się granicę, do której dąży prędkość średnia $v_{śr}$ odpowiadająca okresowi Δt, gdy Δt dąży do 0.

W rozpatrywanym przypadku jest

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2} g \, \Delta t \right) = gt .$$

Analogicznie oblicza się prędkość w przypadku prostoliniowego ruchu punktu. Stosunek $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ wyraża *prędkość średnią* $v_{śr}$ w okresie Δt.

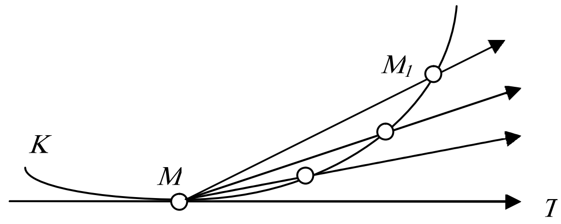
Prędkość *rzeczywistą* v w chwili t otrzymuję stąd przez przejście do granicy

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{śr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

III.2 Styczna do krzywej

Niech będzie dana krzywa K (rys. 2), a na niej punkt M. Biorę na krzywej K punkt M_1 różny od punktu M i prowadzę sieczną MM_1. Gdy punkt M_1 będzie poruszał się wzdłuż krzywej, sieczna będzie się obracała wokół punktu M.

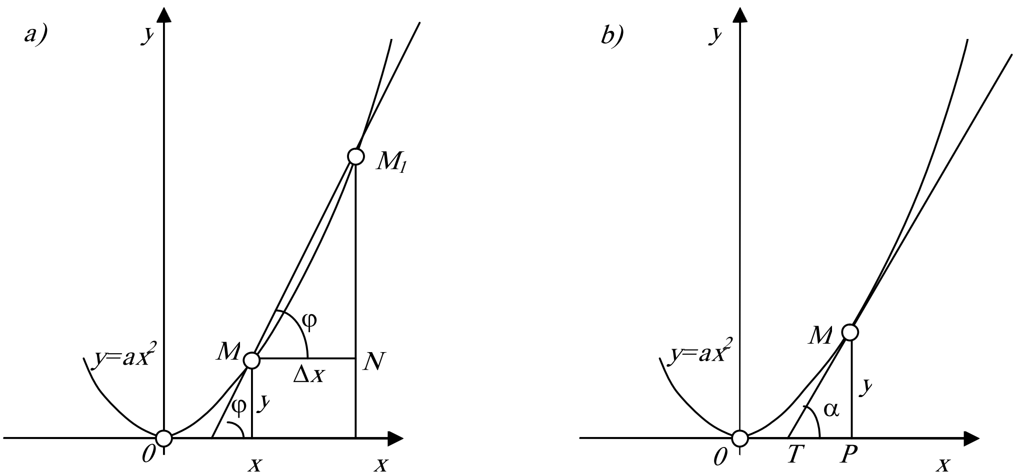
Styczną do krzywej K w punkcie M nazywa się graniczne położenie MT siecznej MM_1, gdy punkt M_1 dąży wzdłuż krzywej do punktu M. Sens tej definicji polega na tym, że kąt $\angle M_1MT$ staje się dowolnie mały, jeśli cięciwa MM_1 jest dostatecznie mała.



Rys. 2

Zastosuję tę definicję do znalezienia stycznej do paraboli $y = ax^2$ w dowolnym jej punkcie $M(x,y)$. Ponieważ styczna przechodzi przez ten punkt, więc aby określić jej położenie, wystarczy znać jeszcze jej współczynnik kątowy.

Nadając odciętej x przyrost Δx, przejdę od punktu M krzywej do punktu M_1 o odciętej $x + \Delta x$ i rzędnej $y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$ (rys. 3). Współczynnik kątowy $tg\varphi$ siecznej MM_1 wyznaczam z trójkąta prostokątnego MNM_1. Jego przyprostokątna MN jest równa przyrostowi odciętej Δx, a przyprostokątna NM_1 jest odpowiednim



Rys. 3

przyrostem rzędnej

$$\Delta y = a\left(2x\,\Delta x + (\Delta x)^2\right),$$

tak więc

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\,\Delta x.$$

Aby znaleźć współczynnik kątowy stycznej, trzeba przejść do granicy przy $\Delta x \to 0$.

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}(2ax + a\,\Delta x) = 2ax.$$

Wynika stąd wygodny sposób konstrukcji stycznej do paraboli. Mianowicie w trójkącie MPT (rys. 3b):

$$TP = \frac{y}{tg\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

T jest więc środkiem odcinka *OP*. Tak więc w celu otrzymania stycznej do paraboli w jej punkcie *M*, wystarczy podzielić odcinek *OP* na połowy i środek jego połączyć z punktem *M*.

W przypadku dowolnej krzywej o równaniu $y = f(x)$ współczynnik kątowy stycznej można znaleźć w podobny sposób. Przyrostowi Δx odciętej odpowiada przyrost Δy rzędnej, a stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wyraża współczynnik kątowy siecznej $tg\varphi$. Współczynnik kątowy stycznej otrzymuję stąd przez przejście do granicy przy $\Delta x \to 0$:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

III.3 Definicja pochodnej

Pochodna funkcji w punkcie

Dana jest funkcja f określona w przedziale (*a*, *b*), oraz $x_0 \in (a, b)$. Liczbę Δx dla której $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$ **nazywamy przyrostem argumentu w punkcie** x_0.

Różnicę $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ nazywamy **przyrostem wartości funkcji w punkcie** x_0.

Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 nazywamy stosunek: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Definicja 1.

Jeśli funkcja jest określona w przedziale (a, b), $x_0 \in (a,b)$ i istnieje skończona granica $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji f w punkcie** x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

O funkcji f, która ma pochodną w punkcie x_0 mówimy, że jest **różniczkowalna** w tym punkcie.

Przykład 1.

Obliczę pochodną funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie $x_0=1$, czyli $f'(1)$.

Wyznaczam iloraz różnicowy funkcji f w punkcie $x_0=1$.

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\frac{1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\frac{2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2-\Delta x)}{\Delta x}=$$
$$=2-\Delta x$$

Obliczam granicę ilorazu różnicowego: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2-\Delta x)=2$.

Zatem $f'(1)=2$.

Pochodna jako funkcja

Definicja 2.

Oznaczamy D'_f zbiór wszystkich argumentów funkcji f, dla których istnieje pochodna $f'(x)$. Możemy określić nową funkcję, która każdej liczbie $x\in D'_f$ przyporządkowuje $f'(x)$. Funkcję tę nazywamy **pochodną funkcji f** i oznaczamy f'.

Uwaga. Pochodna funkcji f jest funkcją, natomiast pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest liczbą.

Przykład 2.

Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = x^2 + 2x - 1$

Zadanie to rozwiążę tak jak przykład 1, z tym że punkt w którym obliczę pochodną jest dowolny (każdy z dziedziny funkcji), oznaczam go więc przez *x*.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 1 - (x^2 + 2x - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 1 - x^2 - 2x + 1}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 2)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 2) = 2x + 2$$

Zatem $(x^2 + 2x - 1)' = 2x + 2$

IV POJĘCIE POCHODNEJ A PODSTAWOWE POJĘCIA RÓŻNYCH DZIEDZIN WIEDZY

Pojęcie pochodnej ma zastosowanie w różnych dziedzinach wiedzy m. in. Do definiowania pewnych pojęć.

- W rozdziale *III.1* zostało wykazane, że **prędkość v jest pochodną przebytej drogi s względem czasu t.**

- W rozdziale *III.2* zostało udowodnione, że **współczynnik kątowy** $tg\alpha$ **stycznej jest pochodną rzędnej y względem odciętej x.**

- Jeśli prędkość ruchu v nie jest stała i sama zmienia się z biegiem czasu t: $v = f(t)$, to rozpatruje się prędkość zmiany prędkości nazywaną *przyśpieszeniem.*

  Jeśli przyrostowi czasu Δt odpowiada przyrost prędkości Δv, to stosunek

$$a_{śr} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

wyraża przyśpieszenie średnie w odcinku czasowym Δt, a granica jego jest przyśpieszeniem ruchu w danej chwili:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{śr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Przyśpieszenie jest pochodną prędkości względem czasu.

- Za pomocą pochodnej określa się pojęcie pojemności cieplnej ciała przy danej temperaturze.

Przyjmuję oznaczenia: θ - temperatura (w stopniach C), W – ilość ciepła, której potrzeba, aby ogrzać ciało od 0° do θ° (w kaloriach). W jest funkcją θ: $W = f(\theta)$. Nadajmy temperaturze θ pewien przyrost $\Delta\theta$, wtedy W też otrzyma przyrost ΔW. *Średnia pojemność cieplna* przy nagrzewaniu od θ° do θ°+$\Delta\theta$° będzie równa

$$c_{śr} = \frac{\Delta W}{\Delta \theta}.$$

Ponieważ jednak przy zmianie $\Delta\theta$ ta średnia pojemność cieplna na ogół się zmienia, nie możemy jej przyjąć za pojemność cieplną przy danej temperaturze θ. Aby otrzymać tę ostatnią trzeba przejść do granicy:

$$c = \lim_{\Delta\theta \to 0} c_{śr} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta \theta}.$$

Pojemność cieplna ciała jest pochodną ilości ciepła względem temperatury.

Przytoczę określenie *natężenia prądu* zmiennego w danej chwili.

Przyjmuję oznaczenia: t – czas (w sekundach), liczony od pewnej chwili początkowej; Q – ilość elektryczności (w kolumbach), która przepłynęła w ciągu tego czasu przez przekrój poprzeczny obwodu elektrycznego. Q jest funkcją t: $Q = f(t)$. Powtarzając poprzednie rozważania otrzymuję, że *średnie natężenie* prądu w okresie Δt będzie równe

$$I_{śr} = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

a natężenie prądu w danej chwili wyrazi się jako granica

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_{śr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Natężenie prądu jest pochodną ilości przepływającego ładunku względem czasu.

Oto przykład zastosowania definicji pochodnej w ekonomii.

Niech funkcja $K(x)$ przyjmuje wartości dodatnie dla $x \rangle 0$. Funkcję $K(x)$ będę w dalszym ciągu interpretować jako funkcję tzw. *kosztów całkowitych*. Przyjmuję, że $K(x)$ wyraża całkowity koszt wyprodukowania x jednostek pewnego dobra. Przyrostowi produkcji od x_0 do $x_0 + h$ (h – bezwzględna wielkość przyrostu) odpowiada przyrost funkcji kosztów $K(x_0 + h) - K(x_0)$.

Iloraz

$$\frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{h}$$

daje przeciętny koszt wyprodukowania jednej jednostki pewnego dobra licząc od poziomu x_0. W konsekwencji granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{h} = K'(x_0)$$

czyli pochodna $K'(x_0)$ jest tzw. *kosztem krańcowym* w punkcie x_0.

Wykres funkcji $y = K'(x)$ nazywamy ***krzywą kosztów krańcowych***.

V ZASTOSOWANIE POCHODNEJ DO BADANIA WŁASNOŚCI FUNKCJI

Monotoniczność funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie 1.

Jeśli funkcje *f* i *g* są określone i różniczkowalne w każdym punkcie przedziału (a, b), to w tym przedziale są również różniczkowalne funkcje: $kf\ (k \in \mathrm{R})$, $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ i

1) $[kf(x)]' = k \cdot f'(x)$

2) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

3) $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

4) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

5) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Twierdzenie 2.

Jeżeli funkcja *f* jest określona i różniczkowalna w przedziale (a, b), zaś jej pochodna f' jest w każdym punkcie tego przedziału dodatnia, to funkcja *f* jest w przedziale (a, b) rosnąca.

Twierdzenie 3.

Jeżeli funkcja *f* jest określona i różniczkowalna w przedziale (a, b), zaś jej pochodna f' jest w każdym punkcie tego przedziału ujemna, to funkcja *f* jest w przedziale (a, b) malejąca.

Uwaga! Twierdzenia odwrotne do twierdzeń 2 i 3 nie muszą być prawdziwe.

Przykład 3.

Zbadać monotoniczność funkcji określonej wzorem $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 1$.

Obliczam pochodną $f'(x) = 3x^2 - 10x - 8$.

Pochodna jest trójmianem kwadratowym – badam znak pochodnej szkicując jej wykres.

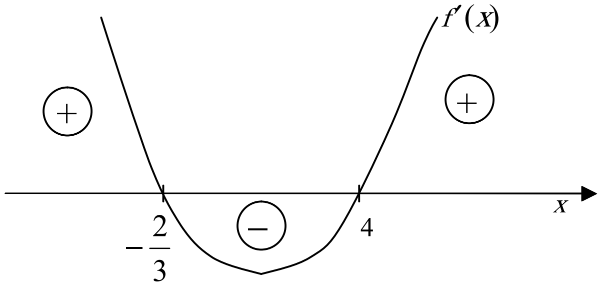
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 196$$

$$\sqrt{\Delta} = 14$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x_2 = 4$$



Na podstawie szkicu wykresu pochodnej widać, że:

$f'(x) \rangle\ 0$ dla $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (4; +\infty)$ oraz $f'(x) \langle\ 0$ dla $x \in (-\frac{2}{3}; 4)$.

Na podstawie twierdzeń 2 i 3 stwierdzam, że funkcja rośnie w każdym z przedziałów $(-\infty; -\frac{2}{3})$ oraz $(4; +\infty)$, zaś maleje w przedziale $(-\frac{2}{3}; 4)$.

Ekstremum funkcji różniczkowalnej

Twierdzenie 4.

Jeżeli funkcja f jest określona i różniczkowalna w przedziale (a, b), $x_0 \in (a,b)$, zaś jej pochodna f' spełnia warunki:

1) $f'(x_0) = 0$

2) $f'(x_0) \rangle\ 0$ dla każdego $x \in (a, x_0)$ i $f'(x_0) \langle\ 0$ dla każdego $x \in (x_0, b)$

to w punkcie x_0 funkcja osiąga maksimum.

Twierdzenie 5.

Jeżeli funkcja f jest określona i różniczkowalna w przedziale (a, b), $x_0 \in (a,b)$, zaś jej pochodna f' spełnia warunki:

1) $f'(x_0) = 0$

2) $f'(x_0) \langle\ 0$ dla każdego $x \in (a, x_0)$ i $f'(x_0) \rangle\ 0$ dla każdego $x \in (x_0, b)$

to w punkcie x_0 funkcja osiąga minimum.

Przykład 4.

Wyznaczyć ekstremum funkcji określonej wzorem $f(x) = 4x^3 - 108x + 200$

D=R

Funkcja jest różniczkowalna w R i $f'(x) = 12x^2 - 108$

Znajduję miejsca zerowe pochodnej

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 108 = 0$

Skąd $x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = -3$

$f'(3)=0$ i f' zmienia znak z „+” na „-” przy przejściu przez $x_1=3$, więc funkcja f ma maksimum w tym punkcie i $f_{\max}=f(3)=-16$

$f'(-3)=0$ i f' zmienia znak z „-” na „+” przy przejściu przez $x_2=-3$, więc funkcja f ma minimum w tym punkcie i $f_{\min}=f(-3)=416$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Przykład 5.

Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykres funkcji $f(x)=x^3-3x^2$

1. Określam dziedzinę funkcji: D=R

2. Obliczam granice funkcji przy x dążącym do $+\infty$ i $-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=-\infty$$

3. Wykres funkcji nie ma asymptot (nie istnieją skończone granice w nieskończoności, ani skończone w punkcie).

4. Miejsca zerowe funkcji:

$$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3-3x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \ \vee x=3$$

Punkt przecięcia się wykresu z osią OY:

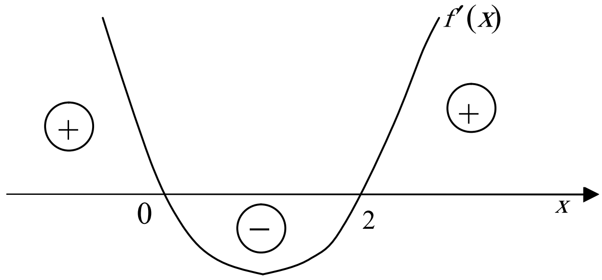
$f(0)=0$ więc wykres przechodzi przez punkt (0, 0)

5. Pochodna funkcji i jej miejsca zerowe:

$$f'(x)=3x^2-6x$$

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-6x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\vee\quad x=2$$

6. Znak pochodnej, monotoniczność i ekstrema funkcji.



$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ więc funkcja rośnie w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ oraz $(2; +\infty)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in (0; 2)$ więc funkcja maleje w przedziale $(0; 2)$.

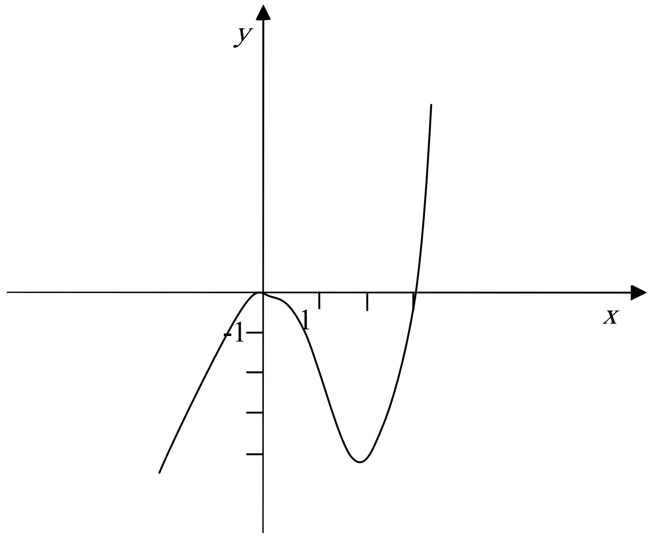
$f'(0) = 0$ i f' zmienia znak z „+" na „-" przy przejściu przez $x = 0$, więc funkcja f osiąga w tym punkcie maksimum i $f_{max} = f(0) = 0$

$f'(2) = 0$ i f' zmienia znak z „-" na „+" przy przejściu przez $x = 2$, więc funkcja f osiąga w tym punkcie minimum i $f_{min} = f(2) = -4$

7. Informacje, które uzyskaliśmy w punktach 1-6 zapisujemy w tabeli przebiegu zmienności funkcji:

x	$(-\infty; 0)$	0	(0; 2)	2	(2; 3)	3	$(3; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

Na postawie tabeli widać, że funkcja rośnie od minus nieskończoności do punktu (0; 0), gdzie osiąga maksimum, dalej maleje do punktu (2; -4), gdzie osiąga minimum i rośnie do plus nieskończoności.


y
x
1
-1

VI ZASTOSOWANIE WŁSNOŚCI FUNKCJI RÓŻNICZKOWALNYCH

Przykład 6.

Kamień rzucony pionowo do góry z pewną prędkością początkową v_0 wznosi się w ciągu czasu t na wysokość h, daną równaniem $h(t) = -5t^2 + 50t$.

Znaleźć: a) prędkość w chwili $t = 0$, b) czas wznoszenia się kamienia, c) największe wzniesienie.

Rozwiązanie:

a) Prędkość początkowa (przy $t = 0$):

$v = h'(t) = 50 - 10t, \qquad v(0) = 50$.

b) Kamień osiąga punkt najwyższy, gdy

$v = h'(t) = 0$, czyli $t = 5$.

c) Największe wzniesienie:

$h(5) = 50 \cdot 5 - 5^2 = 125$.

Przykład 7.

Puszka do konserw w postaci walca o pojemności 54 π ma być tak wykonana, by została zużyta minimalna ilość blachy (minimum powierzchni). Wyznaczyć promień r podstawy i wysokość h puszki.

Rozwiązanie:

Objętość puszki $\pi r^2 h = 54\pi$; stąd

(2)
$$h = \frac{54}{r^2}.$$

Pole powierzchni puszki obliczone według wzoru $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ wynosi

$$P = 2\pi r^2 + \frac{108\pi}{r}.$$

Obliczam pochodną

$$P'(r) = 4\pi r - \frac{108\pi}{r^2}.$$

Pochodna ta równa się zeru, gdy $r^3 = 27$, czyli r = 3. Dla obliczonej wartości r powierzchnia P jest najmniejsza, ponieważ pochodna $P'(r)$ przechodzi przez zero od wartości ujemnych do dodatnich.

Podstawiając do równania (2) $r - 3$ otrzymuję $h = 6$. Zatem puszka o danej pojemności ma minimalną powierzchnię, gdy średnica jest równa wysokości.

VIII ZAMIAST UWAG KOŃCOWYCH

ZGNUŚNIAŁY ŚWIAT[3]

Zgnuśniały świat ze swych rzucamy pojęć
i do abstrakcyj dobijamy bram,
w nieskończoności łatwiej jest nam brodzić,
zamiast skończony życia chwalić kram.

Refren: Niech sobie iks podąża do granicy,
niech funkcja rośnie i maleje wciąż,
my z epsylonem wiemy w tajemnicy,
jaki będzie dalszy świata ciąg.

My wiemy wszystko, wszystko jak należy,
co jest pierwotne i co pochodne jest,
rozcałkować możemy każdy szczegół,
wyróżniczkować nawet młodości grzech.

Niech sobie iks...

Z niczego coś możemy też budować,
czego nie chwyta przestrzeń ani czas,
możemy bez końca twierdzić i dowodzić,
że my – to my – i nikt oprócz nas.

Niech sobie iks...

A tajemnicę tę my zamykamy
w magii nieskończonej armii liczb.
W baterii funkcyj tak sfabrykowanych,
że święty Turek nie zrozumie nic.

Niech sobie iks...

Stanisław Fudali (1953 r.)

---

[3] *Matematyka - nasza niedostrzegalna kultura*, dz. zb. pod red. M. Gołębiowskiego, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1994, s. 92

VIII LITERATURA

1. G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.
2. *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, dz.. zb. pod. red. M. Gołębiowskiego, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1994.
3. J. Laszuk, *Repetytorium z matematyki*, DRUK POL, Warszawa 1995.
4. W. Krysicki, *Poczet wielkich matematyków,* Nasza Księgarnia, Warszawa 1975.